Γραμμική Άλγεβρα Ι - Φεβρουάριο 2016

Θέμα 1 (1.5 Μον.)
Να εξετάσετε αν τα διανύσματα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

του πραγματικού διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^{2\times 2}$ είναι γραμμικά αναξάρτητα και στην συνέχεια αν παράγουν των χώρο αυτόν.

Θέμα 2 (1.5 Μον.)
Να βρεθεί ισχυρά κλιμακωτός πίνακας γραμμοισοδύναμος με τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

και δείξτε ότι ο A αντιστρέφεται και να βρεθεί ο A^{-1} με χρήση γραμμοπράξεων.

Θέμα 3 (2 Μον.)
Να βρεθούν τα $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & ax_2 & + & 2x_3 & = & b \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & b \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & & & x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

(i) να μην έχει λύσει, (ii) να έχει μοναδική λύση, (iii) να έχει άπειρες λύσεις. Να βρείτε τις λύσεις στις περιπτώσεις (ii) και (iii).

Θέμα 4 (1.5 Μον.)
Αν e_1, e_2, e_3 είναι μια βάση ενός δ.χ V διάστασης 3, να δείξετε ότι για όλες τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ τα διανύσματα

$$e_1 + e_2 + e_3,\ e_2 + ae_3,\ ae_2 - e_3$$

είναι επίσης μια βάση του V.

Θέμα 5 (2 Μον.)
Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $T\colon\ \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, με

$$T(ax^2 + bx + c) = (a + 3b + 3c)x^2 + 2ax(a - 4b - 4c).$$

(α) Να βρεθεί μία βάση του πυρήνα $\ker T$ της T και μία βάση της εικόνας ImT της T.

(β) Να βρεθεί μία βάση του υπόχωρου $\ker T \cap ImT$ του $\mathbb{R}_2[x]$.

(γ) Να βρεθεί ο πίνακας $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ της T ως προς τη διατεταγμένη βάση $\mathcal{B} = \{x^2, x, 1\}$ του$\mathbb{R}_2[x]$.

Θέμα 6 (1.5 Μον.)
Δίνεται ένας 8×8 πραγματικός πίνακας A με $\det A = -3$. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα $-2A^4$.

Διάρκεια εξέτασης: **3** ώρες.